OMAR BOUKHOBZA

Université A. Assaâdi
Faculté des Sciences
Département de Maths.

SMA_SMI
Algèbre S_1
2007/2008

Devoir n° 1

À rendre le 11-12-2007 pendant la séance du cours d'Algèbre.

Exercice 1 : Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on considère l'ensemble $H_k = \{ (x, k(x - \frac{1}{x}) \ / x \in \mathbb{R}^* \}$.

-) Montrer que H_k est sous-groupe du groupe $(G, \perp)$ de l'exercice n°3 de la série n°3.

Exercice 2 : Soient $(G,*)$ un groupe d'élément neutre e et $a \in G$, $a \neq e$. On pose $H = \{x \in G / a*x = x*a\}$

-) Montrer que H est sous-groupe de $(G,*)$.

Exercice 3 : Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application bijective. On définit sur E une loi de composition interne $*$ par :

$$\forall x, y \in E \quad : \quad x*y = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

-) Montrer que $(E,*)$ est un groupe abélien et que f est un isomorphisme de $(E,*)$ dans $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 4 : Montrer que les groupes $(\mathbb{Q},+)$ et $(\mathbb{Q}_+^*, \times)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 5 : Un anneau $(A,+,\times)$ est dit booléen si pour tout $x \in A$: $x^2 = x$.

1/ Montrer que pour tout ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$ est un anneau booléen.

2/ Dans la suite, $(A,+,\times)$ est supposé anneau booléen



non réduit à $\{0\}$.

a/ Montrer que pour tout $x \in A$: $x + x = 0$

b/ En déduire que l'anneau $(A,+,\times)$ est commutatif.

c/ On suppose que $(A,+,\times)$ est intègre. Montrer, alors que $\operatorname{card} A \leq 2$.

3/ On désigne par E l'ensemble des éléments m de A, non nuls et tels que pour tout $x \in A$, $mx = 0$ ou $mx = m$

-) Montrer que si m et m' sont deux éléments distincts de E, $mm' = 0$

4)- A tout élément x de A on associe l'ensemble des éléments m de E tels que $mx = m$. On note $\phi(x)$ cette partie de E

-) Montrer que pour tous, x, y de A :

a) $\phi(xy) = \phi(x) \cap \phi(y)$

b) $\phi(x+y+xy) = \phi(x) \cup \phi(y)$

c) $\phi(1+x) = C_E^{\phi(x)}$

d) $\phi(x+y) = \phi(x) \Delta \phi(y)$

e) En déduire que ϕ est un morphisme de l'anneau $(A,+,\times)$ dans $(\mathcal{P}(E), \Delta, \cap)$.

5) On suppose dans cette question que l'anneau A est fini.

a) Soit $x_0 \in A$ non nul. Montrer que si $x_0 \notin E$, il existe $x_1 \in A$ tel que $x_0 x_1 \neq 0$ et $x_0 x_1 \neq x_0$. En déduire qu'il existe $y \in A$ tel que $x_0 y \in E$.

b) En déduire que le morphisme ϕ est injectif.

c) Soit F une partie de E. On désigne par S_F la somme des éléments de F (par convention $S_\phi = 0$)

-) Déterminer la partie $\phi(S_F)$. En déduire que le morphisme ϕ est surjectif.

d/ Enoncer une conclusion claire concernant les anneaux booléens finis et leurs cardinaux.




ETUSUP.com